Série 2 des Travaux Dirigés

Introduction aux calculs des probabilités

1. Ensemble fondamental et environnements

Q1.1. Soient A et B deux événements élémentaires. Donner une expression et représenter le diagramme de Venn de l'événement tel que : (i) A est réalisé mais non B, c.à.d. que seulement A se réalise ; (ii) soit A, soit B, se réalise, mais pas les deux en même temps; c.à.d. qu'exactement un seul des deux événements se produit.

Q1.2. On jette en l'air une pièce de monnaie et un dé, et l'on suppose que l'ensemble fondamental S se compose des 12 éléments : $S = \{F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$.

- (i) Exprimer d'une façon explicite les événements suivants : A ={face et un nombre pair apparaissent}, B = {un nombre premier apparaît}, C ={pile et un nombre impair apparaissent}.
- (ii) Exprimer d'une façon explicite l'événement : (a) A ou B est réalisé, (b) B et C est réalisé, (c) B seulement est réalisé.
- (iii) Lesquels des événements A, B et C s'excluent mutuellement.

Q1.3. On suppose qu'un ensemble fondamental S est formé de 4 éléments : $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Laquelle des fonctions suivantes définit une probabilité sur Ω ?

- (i) $P(a_1) = \frac{1}{2}$, $P(a_2) = \frac{1}{2}$, $P(a_3) = \frac{1}{4}$, $P(a_4) = \frac{1}{5}$
- (ii) $P(a_1) = \frac{1}{2}$, $P(a_2) = \frac{1}{4}$, $P(a_3) = -\frac{1}{4}$, $P(a_4) = \frac{1}{2}$
- (iii) $P(a_1) = \frac{1}{2}$, $P(a_2) = \frac{1}{4}$, $P(a_3) = \frac{1}{8}$, $P(a_4) = \frac{1}{8}$
- (iv) $P(a_1) = \frac{1}{2}$, $P(a_2) = \frac{1}{4}$, $P(a_3) = \frac{1}{4}$, $P(a_4) = 0$

Q1.4. On suppose qu'un ensemble fondamental S est formé de 4 éléments : $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Et soit P une probabilité sur Ω

- (i) Calculer $P(a_1)$ en supposant que , $P(a_2) = \frac{1}{3}$, $P(a_3) = \frac{1}{6}$, $P(a_4) = \frac{1}{9}$
- (ii) Calculer $P(a_1)$ et $P(a_2)$ en supposant que, $P(a_3) = P(a_4) = \frac{1}{4}$, et $P(a_1) = 2P(a_2)$
- (iii) Calculer $P(a_1)$ en supposant que , $P(\{a_2, a_3\}) = \frac{2}{3}$, $P(\{a_2, a_4\}) = \frac{1}{4}$, $P(a_2) = \frac{1}{3}$

2. Situation d'équiprobabilité

Q2.1. Calculer la probabilité p de chacun des événements suivants :

- (i) Un nombre pair apparaît quand on jette un dé bien équilibré
- (ii) Pile apparaît au moins une fois quand on jette trois pièces de monnaie bien équilibrées
- (iii) On obtient une bille blanche en tirant une seule bille dans une urne contenant 4 billes blanches, 3 billes rouges et 2 billes bleues.

Q2.2. On prend au hasard trois ampoules électriques d'un lot de 15 ampoules dont 5 sont défectueuses. Calculer la probabilité p pour que (i) aucune ampoule ne soit défectueuse, (ii) exactement une ampoule soit défectueuse, (iii) au moins une ampoule soit défectueuse.

Q2.3. On choisit deux cartes .au hasard parmi 10 cartes numérotées de 1 à 10. Calculer la probabilité p pour que la somme des deux cartes tirées soit impaire, sachant que (i) on tire les deux cartes ensemble, (ii) on fait un tirage exhaustif des deux cartes l'une après l'autre, (iii) on fait un tirage non exhaustif des deux cartes l'une après l'autre.

Q2.4. Six couples mariés se trouvent dans une pièce.

- (i) On choisit deux personnes au hasard. Calculer la probabilité p pour que (a) ces personnes soient mariées, (b) l'une d'elles soit un homme et l'autre soit une femme.
- (ii) On choisit 4 personnes au hasard. Calculer la probabilité p pour que (a) l'on ait choisi 2 couples de personnes mariées, (b) l'on n'ait aucun couple parmi les 4 personnes. choisies, (c) l'on ait exactement un couple parmi ces 4 personnes.
- (iii) On répartit les 12 personnes en six groupes de 2 personnes. Calculer la probabilité pour que (a) chaque groupe constitue un couple marié, (b) chaque groupe comprenne un homme et une femme.

3. Probabilité conditionnelle et indépendance

Q3.1. On jette une paire de dés bien équilibrés. Calculer la probabilité p pour que la somme obtenue soit supérieure ou égale à 10, sachant que (i) le premier dé a donné 5, (ii) au moins l'un des dés a donné 5.

Q3.2. On jette trois pièces de monnaie bien équilibrées. Calculer la probabilité p pour que toutes les trois donnent face, sachant que (i) la première pièce donne face à priori, (ii) l'une des pièces donne face à priori.

Q3.3. On considère deux évènements A et B tels que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Calculer : $P(A/B)$, $P(B/A)$, $P(A \cup B)$, $P(CA/CB)$, $P(CB/CA)$

Q3.4. On considère deux événements A et B tels que $P(A) = 3/8$, $P(B) = 5/8$ et $P(AUB) = 3/4$. Calculer $P(A/B)$ et $P(B/A)$

4. Probabilités totales et formule de Bayes

Q4.1. Trois machines A, B et C produisent respectivement 60 %, 30 % et 10 % du nombre total de pièces fabriquées dans une usine. Les pourcentages de résultats défectueux de ces machines sont respectivement 2 %, 3 % et 4 %. On choisit une pièce au hasard et on s'aperçoit qu'elle est défectueuse. Calculer la probabilité pour que cette pièce ait été produite par la machine C.

Solutions de Série 2 des Travaux Dirigés

Introduction aux calculs des probabilités

1. Ensemble fondamental et environnements

Q1.1.

(i) $A \cap CB$

(ii) $(A \cap CB) \cup (B \cap CA)$

Q1.2.

(i) Pour obtenir A, il suffit de prendre les éléments de S comportant un F et un nombre pair : $A = \{F2,\ F4,\ F6\}$.
Pour obtenir B, on prend les éléments de S comportant un nombre premier : $B = \{F2,\ F3,\ F5,\ P2,\ P3,\ P5\}$. Pour obtenir C, on prend les éléments de S comportant un P et un nombre impair : $C = \{P1,\ P3,\ P5\}$

(ii) A ou B = $A \cup B = \{F2,\ F4,\ F6,\ F3.\ F5,\ P2,\ P3,\ P5\}$
B etC = $B \cap C = \{P3,\ P5\}$. On prend les éléments de B qui ne sont ni dans A , ni dans C : $B \cap CA \cap CC = \{F3,\ F5,\ P2\}$

(iii) Quand deux événements A et B sont tels que $A \cap B = \emptyset$, ils ne peuvent être réalisés simultanément. On dit qu'ils s'excluent mutuellement, ou qu'ils sont **incompatibles**.
A et C s'excluent mutuellement puisque $A \cap C = \emptyset$

Q1.3.

(i) Puisque la somme des quatre nombres est supérieure à un,$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{77}{60}$, la fonction ne définit pas une probabilité sur S

(ii) Puisque $P(a_3\ )$ est négatif, la fonction ne définit pas une probabilité sur S.

(iii) Puisque chaque nombre est positif et que leur somme est égale à un, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1$, la fonction définit effectivement une probabilité sur S.

(iv) Les nombres sont positifs ou nuls, et leur somme est égale à un ; par conséquent la fonction définit bien une probabilité sur S.

Q1.4.

(i) Soit $P(a_1\ ) = p$. Pour que p soit une probabilité, il faut que la somme des probabilités sur l'ensemble des points soit égale à un : $p\ + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = 1$ ou $p\ = \frac{7}{18}$.

(ii) Soit $P\ (a_2\ ) = p$, alors $P(a_1) = 2p$.
D'où $2p\ +\ p\ + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\ =\ 1$ ou $p\ = \frac{1}{6}$ ·
De sorte que $P(a_2) = \frac{1}{6}$ et $P(a_1\ ) = \frac{1}{3}$·

(iii) Soit $P\ (a1) = p$

$$P(a_3) =\ P(\{a_1.a_3\}) -\ P\ (a_2) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$P\ (a_4) =\ P(\{a_2, a_4\}) - \ P(a_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Alors $p\ + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ ou $p\ = \frac{1}{6}$. c'est-à-dire , $P\ (a_1) = \frac{1}{6}$·

2. Situation d'équiprobabilité

Q2.1.

(i) L'événement peut se réaliser de 3 façons (un 2, un 4 ou un 6) parmi 6 cas équiprobables ; par conséquent : $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

(ii) Si l'on considère les pièces séparément, il y a 8 cas équiprobables : FFF, FFP, FPF, FPP, PFF, PFP, PPF, PPP. Seul le premier cas est contraire à l'événement considéré ; par conséquent : $p = \frac{7}{8}$

(iii) Il y a $4 + 3 + 5 = 12$ billes, dont 4 sont blanches ; par suite $p = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Q2.2.

Il y a $\binom{15}{3} = 455$ possibilités de choisir 3 ampoules parmi les 15 ampoules données.

(i) Puisqu'il y a $15 - 5 = 10$ ampoules non défectueuses, il y a $\binom{10}{2} = 120$ possibilités de choisir 3 ampoules non défectueuses, D'où $p = \frac{120}{455} = \frac{24}{91}$

(ii) Il y a 5 ampoules défectueuses et $\binom{10}{3}$= 45 couples différents d'ampoules non défectueuses ; par conséquent il *y* a $5 \times 45 = 225$ possibilités de choisir 3 ampoules dont l'une soit défectueuse.
D'où $p = {}^{225}/_{455} = {}^{45}/_{91}$

(iii) L'éventualité pour qu'au moins une ampoule soit défectueuse est le complémentaire de l'événement caractérisé par l'absence totale d'ampoule défectueuse, qui d'après (i), a une probabilité de $= \frac{24}{91}$
Par conséquent $p = 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}$

Q2.3.

(i) Il y a $\binom{10}{2} = 45$ possibilités de choisir 2 cartes parmi les 10 données. La somme est impaire si un nombre est impair et l'autre est pair. Il y a 5 nombres pairs et 5 nombres impairs. Par conséquent il y a $5 \times 5 = 25$ possibilités de choisir un nombre pair et un nombre impair. D'où $p = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$

(ii) il y a $10 \times 9 = 90$ possibilités de faire un tirage exhaustif de deux cartes l'une après l'autre. Il y a $5 \times 5 = 25$ possibilités de tirer un nombre pair et ensuite un nombre impair, et $5 \times 5 = 25$ possibilités d'avoir un nombre impair, puis ensuite un nombre pair : d'où $p = \frac{25+25}{90} = \frac{50}{90} = \frac{5}{9}$

(iii) il y a $10 \times 10 = 100$ possibilités de faire un tirage non exhaustif de deux cartes l'une après l'autre. Comme pour (ii), il y a $5 \times 5 = 25$ possibilités d'avoir un nombre pair, puis un nombre impair. Enfin il y a $5 \times 5 = 25$ possibilités d'avoir un nombre impair et ensuite un nombre pair ; d'où $p = \frac{25+25}{100} = \frac{1}{2}$

Q2.3.

Q2.4.

(i) Il y a $\binom{12}{2} = 66$ possibilités de choisir 2 personnes parmi les 12 personnes considérées.

a) il y a 6 couples mariés d'où $p = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$

b) Il y a 6 façon; de choisir un homme et 6 façons de choisir une femme ; d'où $p = \frac{6\times 6}{66} = \frac{6}{11}$

(i) Il y a $\binom{12}{4} = 495$ possibilités de choisir 4 personnes parmi les 12 personnes considérées.

a) Il y a $\binom{6}{2} = 15$ façons de choisir 2 couples parmi les 6 couples ; d'où $p = \frac{15}{495} = \frac{1}{33}$

b) Les 4 personnes proviennent de 4 couples différents. Il y a $\binom{6}{2} = 15$ façons de choisir 4 couples parmi les 6 couples, et 2 façons pour choisir une personne de chaque couple. Par conséquent $p = \frac{2.2.2.2.15}{495} = \frac{16}{33}$

c) Cet événement s'exclut mutuellement des deux événements précédents (qui s'excluent aussi mutuellement) et au moins l'un de ces événements doit se réaliser. Par conséquent $p + \frac{1}{33} + \frac{16}{33} = 1$ d'où $p = \frac{16}{33}$

(i) Il y a $\frac{12!}{2!2!2!2!2!2!} = \frac{12!}{2^6}$ partitions possibles des 12 personnes en 6 groupes Ordonnés de 2 personnes chacun.

a) On peut placer les 6 couples dans les 6 groupes ordonnés de 6! façons. D'où $p = \frac{6!}{12!/2^6} = \frac{1}{10395}$

b) On peut placer les six hommes dans les 6 groupes ordonnés de 6! façons, et les 6 femmes également de 6! façons. par suite $p = \frac{6!\,.\,6!}{12!/2^6} = \frac{16}{231}$

3. Probabilité conditionnelle et indépendance

Q3.1.

(i) Si le premier dé a donné 5, l'ensemble fondamental est
$A = \{(5,1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), \{6, 5), (5, 6)\}$ La somme est supérieure ou égale à 10 pour deux des six résultats : (5, 5), (5, 6) D'où $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(ii) Si l'un des dés au moins a donné 5, l'ensemble fondamental est composé de onze éléments :
$B = \{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (6, 5)\}$
La somme est supérieure ou égale à 10 pour trois des onze résultats : (5, 5), (5, 6), (6, 5). D'où $p = \frac{3}{11}$

Q3.2.

L'ensemble fondamental a huit éléments :

$$S = \{FFF, FFP, FPP, PPP, PPP, PPP, PPP, PPP\}$$

(i) Si la première pièce tombe à priori sur face, l'ensemble fondamental est :

$$A = \{PFF, PFP, FPF, FPP\}$$

Etant donné que les trois pièces donnent toutes les trois face dans 1 cas sur 4, $p = \frac{1}{4}$.

(ii) Si l'une des pièces tombe à priori sur face, l'ensemble fondamental est

$$B = \{FFF, FFP, FPF, FPP\ PFF, PFP, PPP\}$$

Comme les trois pièces donnent toutes trois face dans 1 cas sur 7, $p = \frac{1}{7}$.

Q3.3.

(i) $P(A/B)$=$\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$

(ii) $P(B/A)$ =$\frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

(iii) $P(A \cup B)$=$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2}+\frac{1}{3} - \frac{1}{4}=\frac{7}{12}$

(iv) $P(CA/CB)$: On calcule d'abord *P(CB)* et $P(CA \cap CB)$.

$P(CB) = 1 - P(B) = 1$-$\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ **<u>D'après la loi de De Morgan</u>**

$C(AU\ B) = CA \cap CB$

d'où *P(CA* n CB) = *P(C(AU* B)) = 1 - *P(A* U B) = 1- $\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$

Ainsi $P(CA/CB)$=$\frac{P(CA\cap CB)}{P(CB)} = \frac{5/12}{2/3} = \frac{5}{8}$

(i) $P(CB/CA)$

$$P(CB) = 1 - P(A) = 1 - {}^1\!/_2 = {}^1\!/_2$$

D'où $P(CB/CA)$=$\frac{P(CB\cap CA)}{P(CA)} = \frac{5/12}{1/2} = \frac{5}{6}$

4. Probabilités totales et formule de Bayes

Q4.1.

Soit $X = \{pièces\ défectueuses\}$. On cherche à calculer *P(C/X),* qui est la probabilité pour qu'une pièce ait été fabriquée par la machine *C,* étant acquis qu'elle est défectueuse. D'après le théorème de Bayes,

$$P\left(\frac{C}{X}\right) = \frac{P(C)P(\frac{X}{C})}{P\ (A)\ \mathrm{P(X/\ A)} + P\ (B)\ \mathrm{P(X/\ B)} + P\ (C)\ \mathrm{P(X/\ C)}}$$

$$P(C/X) = \frac{0{,}10 \times 0{,}04}{0{,}6 \times 0{,}02 + 0{,}3 \times 0{,}03 + 0{,}1 \times 0{,}04} = \frac{4}{25}$$

Série 3 des Travaux Dirigés

Variables aléatoires

1. Variables aléatoires et Espérance Mathématique

Q1.1. Calculer l'espérance mathématique μ, la variance a σ^2 et l'écart-type σ de chacune des lois de probabilité suivantes :

i.

x_i	2	3	11
$f(x_i)$	$1/3$	$1/2$	$1/6$

ii.

x_i	-5	-4	1	2
$f(x_i)$	$1/4$	$1/8$	$1/2$	$1/8$

iii.

x_i	1	3	4	5
$f(x_i)$	0,4	0,1	0,1	0,3

Q1.2. On jette un dé bien équilibré. Soit X la variable représentant le double du nombre obtenu, et Y une variable prenant les valeurs 1 ou 3 suivant que l'on obtient soit un nombre impair., soit un nombre pair. Calculer la distribution, l'espérance, la variance et l'écart-type de (i) X, (ii) Y, (iii) $X + Y$, (iv) XY.

Q1.3 On jette trois fois une pièce de monnaie mal équilibrée et telle que $P(F) = 3/4$ et $P(P) = 1/4$. Soit X la variable aléatoire représentant la plus grande succession de faces que l'on obtient. Calculer la distribution de probabilité, la moyenne, la variance et l'écart-type de X.

2. Loi de probabilité produit, variables aléatoires indépendantes

Q2.1. Supposons que X et Y aient les distributions jointes

X \ Y	**-3**	**2**	**4**	**Somme**
1	0,1	0,2	0,2	0,5
3	0,3	0,1	0,1	0,5
	0,4	0,3	0,3	

i. Calculer les lois de probabilité de X et Y
ii. Calculer $Cov\,(X, Y)$, c.à.d. la covariance de X et Y
iii. Calculer $\rho(X.Y)$, c.à.d. le coefficient de corrélation de X et Y
iv. Est-ce que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes

Q2.2. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes ayant les lois de probabilité

x_i	1	2
$f(x_i)$	0,6	0,4

Loi de Probabilité de X

y_i	5	10	15
$g(y_j)$	0,2	0,5	0,3

Loi de Probabilité de Y

Calculer la loi de probabilité produit h de X et Y.

Q2.3. On lance trois fois une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. X est une variable aléatoire prenant respectivement les valeurs 0 et 1 selon que le premier jet donne face ou pile. Y désigne le nombre de faces obtenu. Calculer (i) la loi de probabilité de X et Y, (ii) la loi de probabilité produit h de X et Y, (iii) $Cov\,(X, Y)$.

3. Variables aléatoires continue

Q3.1. Soit X la v.a. continue ayant la distribution :

$$f(x) = \begin{cases} x + k \; si \; 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \qquad ailleurs \end{cases}$$

(i) Calculer k.
(ii) Calculer $P(1 \leq X \leq 2)$

Q3.2. Soit X la v.a. continue dont la distribution est constante sur un intervalle $I = \{a \leq X \leq b\}$ et vaut 0 ailleurs :

$$f(x) = \begin{cases} k \ si \ a \leq x \leq b \\ 0 \quad ailleurs \end{cases}$$

On dit que cette variable est uniformément distribuée sur I. (i) Calculer k (ii) Calculer la moyenne de X. (iii) Déterminer la fonction de répartition F de X.

Q3.3. Soit X une variable aléatoire continue ayant la loi de probabilité.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & si \ 0 \leq x \leq 8 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

(i) Calculer : $P(2 \leq x \leq 5)$, $P(3 \leq x \leq 7)$et $P(x \leq 6)$.

(ii) Déterminer et représenter graphiquement la fonction de répartition F de X.

Solutions de la Série 3 des Travaux Dirigés

Variables aléatoires

1. Variables aléatoires et Espérance Mathématique

Q1.1

i)

$$\mu = \sum x_i\, f(x_i) = 2 \times {}^{1}\!/_{3} + 3 \times {}^{1}\!/_{2} + 11 \times {}^{1}\!/_{6} = 4$$
$$\sum {x_i}^2 f(x_i) = 2^2 \times {}^{1}\!/_{3} + 3^2 \times {}^{1}\!/_{2} + 11^2 \times {}^{1}\!/_{6} = 26$$
$$\sigma^2 = \sum {x_i}^2 f(x_i) - \mu^2 = 26 - 16 = 10$$
$$\sigma = \sqrt{10} = 3{,}2$$

ii)

$$\mu = \sum x_i\, f(x_i) = -5 \times {}^{1}\!/_{4} - 4 \times {}^{1}\!/_{8} + 1 \times {}^{1}\!/_{2} + +2 \times {}^{1}\!/_{8} = -1$$
$$\sum {x_i}^2 f(x_i) = 9{,}25$$
$$\sigma^2 = \sum {x_i}^2 f(x_i) - \mu^2 = 9{,}25 - 1 = 8{,}25$$
$$\sigma = \sqrt{8{,}25} = 2{,}9$$

iii)

$$\mu = \sum x_i\, f(x_i) = 3$$
$$\sum {x_i}^2 f(x_i) = 12$$
$$\sigma^2 = \sum {x_i}^2 f(x_i) - \mu^2 = 12 - 9 = 3$$
$$\sigma = \sqrt{3} = 1{,}7$$

Q1.2

L'ensemble fondamental est $S = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, et chacun des nombres a une probabilité $1/6$ d'apparaître.

i) $X(1) = 2,\ X(2) = 4,\ X(3) = 6,\ X(4) = 8,\ X(5) = 10,\ X(6) = 12$. De sorte que $X(S) = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}$ et que chaque nombre a la probabilité 1/6. La distribution de probabilité de X est donc : $\mu_X = E(X) = \sum x_i\, f(x_i) = 2 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 8 \times \frac{1}{6} + 10 \times \frac{1}{6} + 12 \times \frac{1}{6} = \frac{42}{6} = 7$

$$E(X^2) = \frac{364}{6} = 60{,}7$$
$${\sigma_X}^2 = Var(X) = 60{,}7 - 7^2 = 11{,}7$$
$$\sigma_X = \sqrt{11{,}7} = 3{,}4$$

ii)

$Y(1) = 1,\ Y(2) = 3,\ Y(3) = 1,\ Y(4) = 3,\ Y(5) = 1\ ,\ Y(6) = \ = 3$. D'où $Y(S) = \{1,\ 3\}$ et $g(1) = P(Y = 1) = P(1,\ 3,\ 5) = \frac{3}{6}$ et $g(3) = P(Y = 3) = P(\{2,\ 4,\ 6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$$\mu_Y = E(Y) = \sum y_i\, g(y_i) = 1 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2} = 2$$
$$E(Y^2) = 5$$

$$\sigma_Y{}^2 = Var(Y) = 5 - 2^2 = 1$$
$$\sigma_Y = \sqrt{1} = 1$$

iii)

Comme $(X+Y)(s) = X(s) + Y(s)$, on obtient : $(X+\ Y)(1) = 2\ +\ 1 = 3$

$$(X+Y)(2) = 4+3\ = 7$$
$$(X+Y)(3) = 6+1 = 7$$
$$(X+Y)(4) = 8+3 = 11$$
$$\{X+Y)(5) =\ 10\ +1\ =\ 11$$
$$(X+Y)(6) =\ 12\ +\ 3\ =\ 15$$

Par suite, l'espace image est $(X+\ Y)\ (S)\ =\ \{3,\ 7,\ 11,\ 15\}$, 3 et 15 ont donc chacun $1/6$ comme probabilité de réalisation, tandis que 7 et 11 ont chacun 2/6 comme probabilité de réalisation. Il en résulte que la distribution de probabilité de $X+Y$ est : tableau de la loi de probabilité

On en déduit

$$\mu_{X+Y} = E(X+Y) = 3\times\frac{1}{6} + 7\times\frac{2}{6} + 11\times\frac{2}{6} + 15\times\frac{1}{6} = \frac{54}{6} = 9$$
$$E((X+Y^2)) = \frac{574}{6} = 95{,}7$$
$$\sigma_{X+Y}{}^2 = Var(X+Y) = 95{,}7 - 9^2 = 14{,}7$$
$$\sigma_{X+Y} = \sqrt{14{,}7} = 3{,}8$$

iv)

Comme $(XY)(s) = X\ (s)\ Y(s)$, on obtient :

$$(XY)(1) = 2\times 1 = 2$$
$$(XY)(2) = 4\times 3 = 12$$
$$(XY)(3) = 6\times 1 = 6$$
$$(XY)(4) = 8\times 3 = 24$$
$$(XY)(5) = 10\times 1 = 10$$
$$(XY)(6) = 12\times 3 = 36$$

Donc :

$$\mu_{X\times Y} = E(X\times Y) = 2\times\frac{1}{6} + 6\times\frac{1}{6} + 10\times\frac{1}{6} + 12\times\frac{1}{6} + 24\times\frac{1}{6} + 36\times\frac{1}{6} = \frac{90}{6} = 15$$
$$E((XY^2)) = \frac{2156}{6} = 395{,}3$$
$$\sigma_{XY}{}^2 = Var(XY) = 395{,}3 - 15^2 = 134{,}3$$
$$\sigma_{XY} = \sqrt{134{,}3} = 11{,}6$$

Q1.3

La variable aléatoire est définie *sur* l'ensemble fondamental

$$S = \{FFF,\ FFP,\ FPF,\ FPP,\ PFF\ ,\ PFP,\ PPF,\ PPP\}$$

Les points de *S* ont respectivement les probabilités suivantes ;

$$P(FFF) = \frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4} = \frac{27}{64}$$
$$P(FFP) = \frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{9}{64}$$
$$P(FPF) = \frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4} = \frac{9}{64}$$

$$P(FPP) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{64}$$
$$P(PFF) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$$
$$P(PFP) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{64}$$
$$P(PPF) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{64}$$
$$P(PPP) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$$

Comme X représente la plus longue suite de faces : $X(PPP) = 0$; $X(FPP) = 1,\ X(FPF) = 1,\ X(PFP) = 1$, $X(PPF) = 1,\ X(FFP) = 2,\ \ X(PFF) = 2$; $X(FFF) = 3$
De sorte que l'espace image de X est {0. l, 2, 3} . La probabilité $f(x_i)$ de chaque x_i dans $X(S)$ s'obtient en faisant la somme des probabilités des points de S dont l'image est x_i

$$f(0) = P(PPP) = \frac{1}{64}$$
$$f(1) = P(FPP) + P(FPF) + P(PFP) + P(PPF) = \frac{18}{64}$$
$$f(2) = P(FFP) + P(FFP) = \frac{18}{64}$$
$$f(3) = P(FFF) = \frac{27}{64}$$

Par la suite

$$\mu = E(X) = 0 \times \frac{1}{64} + 1 \times \frac{18}{64} + 2 \times \frac{18}{64} + 3 \times \frac{27}{64} = \frac{135}{64} = 2{,}1$$
$$E(X^2) = \frac{333}{64} = 5{,}2$$
$$\sigma_X{}^2 = Var(X) = 5{,}2 - 2{,}1^2 = 0{,}8$$
$$\sigma_{XY} = \sqrt{0{,}8} = 0{,}9$$

2. Loi de probabilité produit, variables aléatoires indépendantes

Q2.1.

i) Les lois de probabilité de X et de Y sont données par les distributions marginales suivantes :
ii) $Cov(X,Y) = E(XY) - \mu_X\mu_Y$, On calcule d'abord les espérances mathématiques de X et de Y

$$\mu_X = E(X) = 1 \times 0{,}5 + 3 \times 0{,}5 = 2$$
$$\mu_Y = E(Y) = -3 \times 0{,}4 + 2 \times 0{,}3 + 4 \times 0{,}3 = 0{,}6$$
$$E(XY) = \sum x_i\, y_j f\big(x_i,\ y_j\big) = 1 \times (-3) \times 0{,}1 + 1 \times 2 \times 0{,}2 + .. + 3 \times 4 \times 0{,}1 = 0$$

Donc :

$$Cov(X,Y) = E(XY) - \mu_X\mu_Y = 0 - 2 \times 0{,}6 = -1{,}2$$

iii) On calcule d'abord σ_X et σ_Y :

$$E(X) = 1^2 \times 0{,}5 + 3^2 \times 0{,}5 = 5$$
$$\sigma_X{}^2 = Var(X) = 5 - 2^2 = 1$$
$$\sigma_X = \sqrt{1} = 1$$

Et

$$E(Y) = 9 \times 0{,}4 + 4 \times 0{,}3 + 16 \times 0{,}3 = 9{,}6$$

$$\sigma_Y{}^2 = Var(Y) = 9{,}6 - 0{,}6^2 = 9{,}24$$
$$\sigma_Y = \sqrt{9{,}24} = 3$$
$$\rho\big(X.\ Y\big) = {}^{cov(X,Y)}/_{\sigma_X\sigma_Y} = -\frac{1{,}2}{1\times 3} = -0{,}4$$

vi) X et Y ne sont pas indépendantes, puisque $P(X = 1,\ Y = -3) \neq P(X\ =\ 1)P(Y = -\ 3)$, c.à.d. que l'élément $h(1,\ -\ 3)\ =\ 0{,}1$ figurant dans le tableau n'est pas égal à $f(l)g(\ -\ 3)\ =\ (0{,}5)(0{,}4)\ =\ 0{,}2$ qui est le produit de ses éléments marginaux.

Q2.2.

Puisque X et Y sont indépendantes, la loi de probabilité produit h peut s'obtenir à partir des distributions marginales f et g. On construit d'abord comme ci-dessous à gauche le tableau de la loi de probabilité produit, à l'aide seulement des distributions marginales. Puis afin d'obtenir les autres éléments, on fait le produit des éléments marginaux, c.à.d. qu'on pose $h(x;\ ,yi) =\ f(x\ ) \times g(yi)$

Série 4 des Travaux Dirigés

Lois de Probabilités

1. Distribution Binomiale

Q1.1. Déterminer :

(i) $\mathcal{B}(2;\ 5, \frac{1}{3})$ (ii) $\mathcal{B}(3;\ 6, \frac{1}{2})$ (iii) $\mathcal{B}(3;\ 4, \frac{1}{4})$

Q1.2. On lance trois fois une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. Calculer la probabilité p pour qu'il y ait :

(i) Trois fois face (ii) Deux fois face (iii) Une fois face (iv) Aucune fois face

Q1.3. Une équipe A a la probabilité $\frac{2}{3}$ de gagner chaque fois qu'elle joue. Sachant que A joue 4 parties, calculer la probabilité pour que A gagne :

(i) Exactement 2 parties (ii) Au moins une partie (iii) Plus de la moitié des parties

Q1.4. Une famille a 6 enfants. Calculer la probabilité pour qu'il y ait :

(i) 3 garçons et 3 filles (ii) Moins de garçons que de filles

Q1.5. Combien de dés doit-on jeter pour que la probabilité d'obtenir un 6 soit plus grande que $\frac{1}{2}$.

Q1.6. Calculer le nombre moyen de garçons dans une famille de 8 enfants, en supposant que la distribution des sexes est équiprobable. Quelle est la probabilité pour que la famille ait un nombre de garçons égal à ce nombre moyen.

Q1.7. La probabilité pour qu'un article produit par une usine soit défectueux est $0{,}02$. Un chargement de 10 000 articles est entreposé. Calculer le nombre moyen E des articles défectueux et l'écart-type σ.

2. Distribution Normale

Q2.1. La moyenne et l'écart-type des résultats à un examen sont respectivement 74 et 12. Calculer les résultats en unités centrées réduites des étudiants ayant obtenu les notes :

(i) 65 (ii) 74 (iii) 86 (iv) 92

Q2.2. Reprendre le problème précédent et calculer les notes correspondant aux résultats centrés réduits suivants :

(i) -1 (ii) 0,5 (iii) 1,25 (iv) 1,75

Q2.3. Soit $\pi(t)$ la distribution normale centrée réduite. Calculer $\pi(t)$ pour :

(i) $t = 1{,}63$ (ii) $t = -0{,}75$ (iii) $t = -2{,}08$

Q2.4. Soit X une v.a suivant la loi normale centrée réduite π. Calculer :

(i) $P(O \leq X \leq 1{,}42)$ (ii) $P(-O{,}73 \leq X \leq 0)$ (iii) $P(-1{,}37 \leq X \leq 2{,}01)$ (iv) $P(0{,}65 \leq X \leq 1{,}26)$
(v) $P(-1{,}79 \leq X \leq -0{,}54)$ (vi) $P(X \geq 1{,}13)$ (vii) $P(|X| \leq 0{,}5)$

Q2.5. Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite π. Calculer la valeur de t sachant que :

(i) $P(0 \leq X \leq t) = 0{,}4236$ (ii) $P(X \leq t) = 0{,}7967$ (iii) $P(t \leq X \leq 2) = 0{,}1$

Q2.6. On suppose que le poids P de 800 étudiants suit une loi normale de moyenne 66 kilogrammes et d'écart-type 5 kilogrammes. Calculer le nombre N d'étudiants ayant des poids :

(i) Compris entre 65 et 70 kilogrammes (ii) Supérieurs ou égaux à 72 kilogrammes

3. Approximation Normale de la distribution Binomiale

Q3.1. On jette 12 fois une pièce bien équilibrée. Calculer la probabilité P pour que le nombre de faces soit compris entre 4 et 7, en utilisant : (i) la distribution binomiale, (ii) l'approximation normale de la distribution binomiale.

Q3.2. On jette 180 fois un dé bien équilibré. Calculer la probabilité P pour que la face 6 sorte (i) entre 29 et 32 fois, bornes incluses (ii) entre 31 et 35 fois, bornes incluses.

4. Distribution de Poisson

Q4.1. Déterminer :

(i) $e^{-1,3}$ (ii) $e^{-2,5}$

Q4.2. A partir de la distribution de Poisson, Calculer :

(i) $P(2; 1)$ (ii) $P(3; \frac{1}{2})$ (iii) $P(2; 0,7)$

Q4.3. On suppose que dans un livre de 500 pages, il y a 300 fautes d'impression distribuées au hasard. Calculer la probabilité P pour qu'une page donnée contienne (i) exactement 2 fautes d'impression, (ii) 2 fautes d'impression ou plus.

Q4.4. On suppose que 2 % des articles produits par une usine sont défectueux. Calculer la probabilité P pour que dans un échantillon de 100 articles, il y ait 3 articles défectueux.

5. Distribution Multinomiale

Q5.1. Une boîte contient 5 billes rouges, 3 billes blanches et 2 billes bleues. On tire un échantillon non exhaustif de 6 billes. c.à.d. que l'on remet chaque bille dans la boite, avant de tirer la suivante. Calculer la probabilité pour que (i) l'on ait 3 billes rouges, 2 billes blanches et 1 bille bleue ; (ii) l'on ait 2 billes rouges, 3 billes blanches et 1 bleue ; (iii) l'on ait 2 billes de chaque couleur.

Solution de la Série 4 des Travaux Dirigés

Lois de Probabilités

1. Distribution Binomiale

Q1.1.

i) $\mathcal{B}\left(2;\ 5,\ \frac{1}{3}\right) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}$

ii) $\mathcal{B}\left(3;\ 6,\ \frac{1}{2}\right) = \binom{6}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$

iii) $\mathcal{B}\left(3;\ 4,\ \frac{1}{4}\right) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{64}$

Q1.2.

Méthode 1. L'ensemble fondamental correspondant à huit éléments :

$$S = \{FFF,\ FFP,\ FPF,\ FPP.\ PFF,\ PFP,\ PPF,\ PPP\}$$

(i) Il y a seulement une fois trois faces FFF parmi les huit résultats possibles dans S ; par conséquent $P = \frac{1}{8}$

(ii) il y a trois fois deux faces $(FFP,\ FPF,\ PFF)$; d'où $P = \frac{3}{8}$.

(iii) Il y a trois fois une seule face $(FPP,\ PFP\ et\ PPF)$; d'où $P = \frac{3}{8}$.

(iv) Aucune face, c.à.d. trois fois pile (PPP) peut être réalisé une seule fois ; d'où $P = \frac{1}{8}$.

Méthode 2. On utilise le Théorème avec $n = 3$ et $p = q = \frac{1}{2}$

(i) On a $k = 3$ et $P\left(3; 3,\ \frac{1}{2}\right) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \times \frac{1}{8} \times 1 = \frac{1}{8}$

(ii) On a $k = 2$ et $P\left(2; 3,\ \frac{1}{2}\right) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$

(iii) On a $k = 1$ et $P\left(1; 3,\ \frac{1}{2}\right) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

(iv) On a $k = 0$ et $P\left(0; 3,\ \frac{1}{2}\right) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 \times 1 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$

Q1.7.

$$E = np = (10\,000)\,(0.02) = 200.$$

$$\sigma = \sqrt{n \times p \times q} = \sqrt{(10000)(0{,}02)\,(0{,}98)} = \sqrt{196} = 14.$$

2. Distribution Normale

Q2.1.

(i) $t = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{65-74}{12} = -0{,}75$

(ii) $t = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{74-74}{12} = 0$

(iii) $t = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{86-74}{12} = 1{,}0$

(iv) $t = \frac{x-\mu}{\sigma} = \frac{92-74}{12} = 1{,}5$

Q2.4.

i) $P(O \leq X \leq 1{,}42) = 0{,}9222 - 0{,}5 = 0{,}4222$
ii) $P(-O, 73 \leq X \leq 0) = 0{,}4222$
iii) $P(-1{,}37 \leq X \leq 2{,}01) = 0{,}8925$
iv) $P(0{,}65 \leq X \leq 1{,}26) = 0{,}1540$
v) $P(-1{,}79 \leq X \leq -0{,}54) = 0{,}2579$
vi) $P(X \geq 1{,}13) = 0{,}1292$
vii) $P(|X| \leq 0{,}5) = 0{,}3830$

3. Approximation Normale de la distribution Binomiale

Q3.2.

On a $\mu = n \times p = 180 \times \frac{1}{6} = 30.$ et $\sigma = \sqrt{n \times p \times q} = \sqrt{180 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}} = 5..$ Soit X le nombre de fois où la face 6 apparaît

(i) On désire calculer $P(29 < X < 32)$ ou, en supposant que les données sont continues, $P(28{,}5 \leq X \leq 32.5)$. Or, en unités centrées réduites :
$P\big(28{,}5 \leq X \leq 32.5\big) = P\big(-0{,}3 \leq Z \leq 0{,}5\big) = 0{,}3094$
(ii) On cherche à calculer $P(31 \leq X \leq 35),$ ou, en supposant que les données sont continues, $P\big(30{,}5 \leq X \leq 35{,}5\big) = P\big(0{,}1 \leq Z \leq 1{,}1\big) = 0{,}3245$

4. Distribution de Poisson

Q4.2.

$$p(k;\lambda) = P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

(i) $P(2;1) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \frac{1^2 e^{-1}}{2!} = \frac{0{,}368}{2} = 0{,}184$
(ii) $P(3;1/2) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = 0{,}013$
(iii) $P(2;0{,}7) = 0{,}12$

Q4.4.

On applique la distribution binomiale avec $n = 100$ et $p = 0{,}02$. Cependant, comme p est petit, on utilise l'approximation de Poisson avec $\lambda = np = 2$. Ainsi

$$p(k;\lambda) = P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$
$$p(3;2) = \frac{2^3 e^{-2}}{3!} = 0{,}18$$